Composition de mathématiques

(durée 3h - calculatrice autorisée)

Exercice 1 : (5 points)

On a défini une suite arithmético-géométrique, pour tout entier naturel n, par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1}=a\,u_n+b$. (a et b étant deux réels).

On considère une suite (u_n) de terme initial u_0 et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}= a\,u_n+b$.

1. **a.** Que dire de la suite (u_n) si a=1 ?
   b. Que dire de la suite (u_n) si b=0 ?

Depuis le 1er janvier 2000, la population d'un village évolue de la façon suivante d'une année sur l'autre :

- 3% des habitants quittent le village
- 12 personnes viennent s'installer au village.

On note (u_n) la population du village au 1er janvier de l'année 2000+n, avec $u_0 = 4000$.

On suppose que ce modèle correspond à l'évolution de la population sur de longues années.

2. Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer que $u_{n+1} = 0{,}97u_n + 12$.
4. La suite (u_n) est-elle une suite arithmético-géométrique ? Préciser
5. **a.** Montrer que la suite (v_n) définie sur IN par $v_n = u_n - 400$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison et son premier terme v_0.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Exprimer u_n en fonction de n.
6. On considère l'algorithme donné dans l'**Annexe 1**.
   Compléter cet algorithme afin qu'il détermine le rang n à partir duquel u_n est inférieur ou égal à 2000.
7. A l'aide du mode "suite" de la calculatrice, déterminer l'année pour laquelle la population aura été divisée par deux par rapport à celle du 1er janvier 2000 ?

Exercice 2 : (4 points)

Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicamenteuse. On suppose que cette substance n'était pas présente avant l'injection. La quantité de substance médicamenteuse présente à tout instant est modélisée par la fonction *c*. Lorsque *t* représente le temps écoulé, en heures, depuis le début de l'injection, *c(t)* représente la concentration du principe actif dans le sang du malade, exprimée en mg/L. On admet que la fonction *c* est définie pour tout *t* appartenant à [0 ; 6] par :

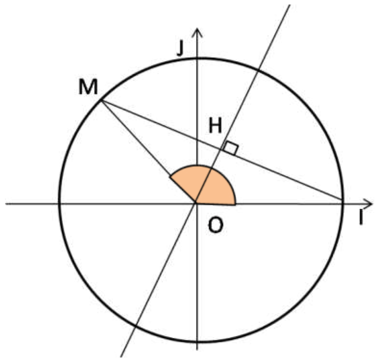
$$c(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

Le principe actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé. Ce médicament est efficace lorsque la concentration du principe actif est supérieure ou égale à 25 mg/L.

1. Étudier les variations de $c(t)$ et déterminer la concentration maximale du principe actif et l'instant t_0 où elle est atteinte.
2. Justifier que pour tout réel *t* de [0 ; 6], on a : $c(t) - 25 = (t-1)(t^2 - 11t + 25)$.
3. Établir le tableau de signe de $(t-1)(t^2-11t+25)$ sur [0 ; 6] puis en déduire l'intervalle de temps sur lequel le principe actif injecté est efficace.

Exercice 3 : (2,5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et C le cercle trigonométrique. Soit un réel $x \in [0 ; \pi]$. On note M le point du cercle C associé à x tel que $x = \left(\overrightarrow{OI} ; \overrightarrow{OM}\right)$ et H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIM.



1. **a .** Donner les coordonnées des points I et M.
   b. En déduire la distance IM en fonction de x.

2. Dans le triangle MOH rectangle en H, démontrer que $MH = \sin\frac{x}{2}$.
3. En déduire l'expression de $\sin\frac{x}{2}$ en fonction de $\cos x$.
4. Démontrer que $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.
5. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 4 : (4 points)

A, B et C sont trois points non alignés. Les points D, E et F sont définis pas :

$$\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = 2\,\overrightarrow{BC}.$$

On se propose de démontrer de deux façons différentes que les points D, E et F sont alignés.
Ces deux méthodes peuvent être traitées indépendant l'une de l'autre.

1) Méthode vectorielle

a. Construire, sur l'**Annexe 2**, les trois points D, E et F.

b. Déterminer la décomposition du vecteur $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Montrer que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires puis conclure.

2) Méthode analytique

a. Pourquoi le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ peut-il définir un repère du plan ?

b. Donner les coordonnées des points A, B, C, D et E dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c. Montrer que F a pour coordonnées (-1 ; 2) dans ce même repère.

d. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$.

e. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires puis conclure.

<u>Exercice 5 :</u> (3 points)

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

1. Résoudre dans IR l'inéquation $f(x) \geq 0$.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. On considère maintenant les trois fonctions g, h et m définies par :

$$g(x) = \sqrt{f(x)}\ ,\ h(x) = |f(x)| \ \text{ et } m(x) = \sqrt{h(x)}$$

   a. Quel est le domaine de définition de g ? Justifier la réponse.
   b. Quel est le domaine de définition de la fonction m ? Justifier la réponse.
   c. Exprimer la fonction h sans les barres de valeurs absolues.

<u>Exercice 6 :</u> (1,5 points)

*Pour chaque question, il faut choisir **la** bonne réponse parmi celles qui sont proposées.*
Écrire sur votre copie le numéro de la question et indiquer clairement la "lettre" de la réponse que vous aurez choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une absence de réponse ou une mauvaise réponse ne fait perdre aucun point.

1. L'angle orienté $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$ a pour mesure :

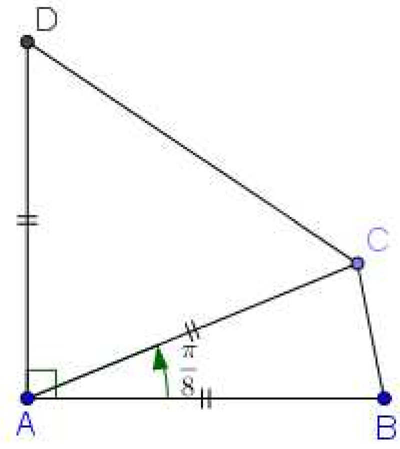
   a) $\frac{3\pi}{8}$ **b)** $\frac{5\pi}{8}$ **c)** $-\frac{3\pi}{8}$

2. L'angle orienté $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ a pour mesure :

   a) $\frac{5\pi}{16}$ **b)** $\frac{5\pi}{8}$ **c)** $\frac{\pi}{3}$

3. L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC})$ a pour mesure :

   a) $-\frac{7\pi}{8}$ **b)** $\frac{9\pi}{16}$ **c)** $\frac{17\pi}{8}$

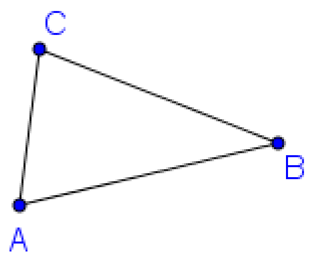


Nom : **Prénom :** **Classe :**

Annexe 1 (exercice 1)

Variables	U : nombre réel
	N : entier naturel
Entrées	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 4000
Traitement	Tant que (U > 2000)
	Affecter à N la valeur ………
	Affecter à U la valeur ………
	Fin Tant que
Sortie	Afficher ………
Fin	

Annexe 2 (exercice 4)



Composition de mathématiques
(correction)

Exercice 1 :

1. **a.** Si a =1 alors $u_{n+1} = u_n + b$ et donc (u_n) est une suite arithmétique de raison b.
   b. Si b =0 alors $u_{n+1} = a u_n$ et donc (u_n) est une suite géométrique de raison a.

2. $u_1 = 4000 - \frac{3}{100} \times 4000 + 12 = \boxed{3892}$ et $u_2 = 3892 - \frac{3}{100} \times 3892 + 12 = \boxed{3787{,}24}$

3. $u_{n+1} = u_n - \frac{3}{100} \times u_n + 12 = u_n \left(1 - \frac{3}{100}\right) + 12 = \boxed{0{,}97 u_n + 12}$

4. (u_n) est une suite arithmético-géométrique avec $a = 0{,}97$ et $b = 12$.

5. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 400 = 0{,}97 u_n + 12 - 400 = 0{,}97 u_n - 388 = 0{,}97(u_n - 400) = \boxed{0{,}97 v_n}$
   Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,97 et de premier terme $v_0 = 3600$.
   b. $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{3600 \times 0{,}97^n}$
   c. $v_n = u_n - 400$ donc $u_n = v_n + 400 = \boxed{3600 \times 0{,}97^n + 400}$.

6. Algorithme de l'**Annexe 1** :

Variables	U : nombre réel
	N : entier naturel
Entrées	Affecter à N la valeur 0
	Affecter à U la valeur 4000
Traitement	Tant que (U > 2000)
	Affecter à N la valeur $\boxed{N+1}$
	Affecter à U la valeur $\boxed{U \times 0{,}97 + 12}$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher $\boxed{N}$
Fin	

7. A l'aide de la calculatrice, on a $u_{26} \approx 2030$ et $u_{27} \approx 1982$ donc la population sera divisée par deux en $2000 + 27 = \boxed{2027}$.

Exercice 2 :

1. $c(t)$ est une fonction polynôme donc dérivable sur IR : $\boxed{c'(t) = 3t^2 - 24t + 36}$
   $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 3 \times 36 = 144 > 0$ donc $c'(t)$ admet deux racines : $\frac{24-12}{6} = \boxed{2}$ et $\frac{24+12}{6} = \boxed{6}$
   Tableau de variations de c : a = 3 > 0

t	0		2		6
signe de c'		+	0	–	0
var. de c	0	↗	32	↘	0

   La concentration du principe actif est maximale à l'instant t_0 = 2 h et ce maximum est $c(2) = \boxed{32 \text{ mg/L}}$.

2. $(t-1)(t^2 - 11t + 25) = t^3 - 11t^2 + 25t - t^2 + 11t - 25 = t^3 - 12t^2 + 36t - 25 = c(t) - 25$

3. Signe de $t^2-11t+25$:

$\Delta = (-11)^2-4\times1\times25 = 21 > 0$ donc le trinôme admet deux racines : $\dfrac{11-\sqrt{21}}{2} \approx 3{,}2$ et $\dfrac{11+\sqrt{21}}{2} \approx 7{,}8$

$t^2-11t+25$ est positif sur $]-\infty\,;\,\dfrac{11-\sqrt{21}}{2}[\;\cup\;]\dfrac{11+\sqrt{21}}{2}\,;\,+\infty[$

Tableau de signe de $(t-1)(t^2-11t+25)$:

t	0		1		$\frac{11-\sqrt{21}}{2}$		6
$t-1$		-	0	+		+	
$t^2-11t+25$		+		+	0	-	
$(t-1)(t^2-11t+25)$		-	0	+	0	-	

Donc $c(t)-25$ est positif sur $[1\,;\,\dfrac{11-\sqrt{21}}{2}]$ donc le principe actif injecté est efficace sur ce même intervalle.

Exercice 3 :

1. **a .** I(1 ; 0) et $\boxed{M(\cos x\,;\,\sin x)}$

b. $IM = \sqrt{(\cos x-1)^2+(\sin x-0)^2} = \sqrt{(\cos x)^2-2\cos x+1+(\sin x)^2}$

or $(\cos x)^2+(\sin x)^2 = 1$ pour tout x réel

donc $\boxed{IM = \sqrt{2-2\cos x}}$

2. Dans le triangle MOH rectangle en H, on a : $\sin\widehat{MOH} = \dfrac{MH}{MO}$ or MO = 1 donc $\boxed{MH = \sin\frac{x}{2}}$

3. $MH = \dfrac{1}{2}IM$ donc $\boxed{\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos x}}$

4. $\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 1$ pour tout x réel donc

$$\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 1 - \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = 1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2-2\cos x}\right)^2 = 1-\frac{1}{4}(2-2\cos x) = \frac{1+\cos x}{2}$$

Or $2-2\cos x \geq 0$

Donc $\boxed{\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}}$.

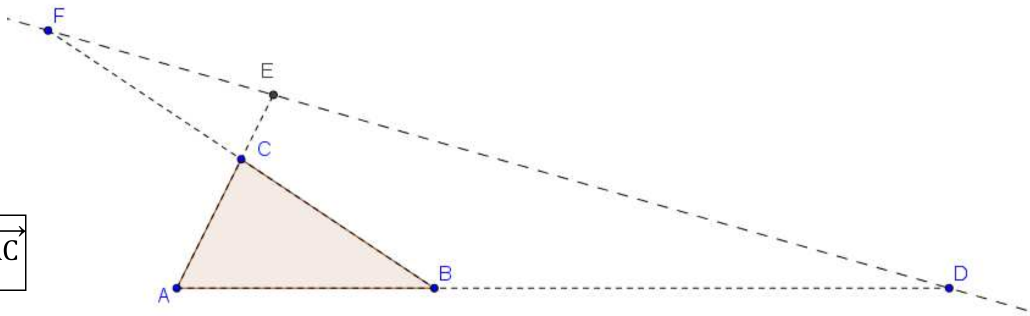
5. Par conséquent : $\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

$\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\dfrac{2\sqrt{2}}{2}} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

Exercice 4 :

1) Méthode vectorielle

a. Annexe 2 :



b. $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= \boxed{-3\,\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC}}$

c. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AC} = \boxed{-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}}$

d. On en déduit que $\boxed{3\,\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}}$ donc que les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires puis que les points D, E et F sont alignés.

2) Méthode analytique

a. Les points <u>A, B et C ne sont pas alignés</u> alors le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC})$ peut définir un repère du plan.

b. Dans le repère $(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC})$: A(0 ; 0) B(1 ; 0) C(0 ; 1) D(3 ; 0) $E\left(0\,;\,\frac{3}{2}\right)$

c. $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AC} = -\,\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}$ donc F a pour coordonnées $\boxed{(-1\,;\,2)}$.

d. $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 0-3 \\ \frac{3}{2}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix} -1-3 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

e. $-3\times 2 - \frac{3}{2}\times(-4) = -6+6 = \boxed{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires et les points D, E et F sont alignés.

Exercice 5 :

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

$\Delta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times 3 = \frac{25}{4} > 0$ donc le trinôme admet deux racines :

$x_1 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3$ et $x_2 = \dfrac{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{25}{4}}}{-1} = -2$, le tableau de signes de f est (avec $a = -\frac{1}{2}$) :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	0	+	

Donc $f(x) \geq 0$ a pour solutions $\boxed{S = [-2\,;\,3]}$

2. f est une fonction polynôme du second degré avec $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc f est croissante puis décroissante.

Son maximum est atteint en $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{2}$ et son tableau de variations est :

x	$-\infty$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $+\infty$
f	$\nearrow$ 3,125 $\searrow$

3. **a.** $g(x) = \sqrt{f(x)}$ g est définie si et seulement si *f(x) ≥ 0 donc* D_g = *[-2 ; 3]*

b. $m(x) = \sqrt{h(x)}$ m est définie si et seulement si $h(x) \geq 0$ c'est-à-dire si $|f(x)| \geq 0$.

Or une valeur absolue est toujours positive donc $\boxed{D_m = \text{IR}}$

c. $h(x) = |f(x)|$ $\quad h(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ c'est-à-dire si $x \in$ [-2 ; 3]

$\qquad = -f(x)$ si $f(x) < 0$ c'est-à-dire si $x \in$]-∞ ; 2[U]3 ; +∞[

Exercice 6 :

1. L'angle orienté $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure : $\boxed{\textbf{c)} -\dfrac{3\pi}{8}}$

$\left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}\right)$ donc $\left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AB}\right)$

$\left(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{3\pi}{8}$

2. L'angle orienté $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)$ a pour mesure : $\boxed{\textbf{a)} \dfrac{5\pi}{16}}$

Dans le triangle ACD isocèle en A, on a : $\widehat{ACD} = \dfrac{\left(\pi - \dfrac{3\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{5\pi}{16}$

L'angle $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right)$ étant orienté dans le sens trigonométrique, on a $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}\right) = \dfrac{5\pi}{16}$

3. L'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ a pour mesure : $\boxed{\textbf{c)} \dfrac{17\pi}{8}}$

$\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{8} \in]-\pi ; \pi]$ donc $\dfrac{\pi}{8}$ est la mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$

- $-\dfrac{7\pi}{8} \in]-\pi ; \pi]$ donc $-\dfrac{7\pi}{8}$ est une mesure principale aussi donc $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) \neq -\dfrac{7\pi}{8}$
- $\dfrac{9\pi}{16} \in]-\pi ; \pi]$ donc $\dfrac{9\pi}{16}$ est une mesure principale aussi donc $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) \neq \dfrac{9\pi}{16}$
- $\dfrac{17\pi}{8} > \pi$ $\qquad \dfrac{17\pi}{8} - 2\pi = \dfrac{\pi}{8}$ donc $\dfrac{17\pi}{8}$ a pour mesure principale $\dfrac{\pi}{8}$

donc $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{17\pi}{8}$